Последовательные труэли: равновесие с выживанием сильнейшего *

Измалков С.Б. †1, Ильинский Д.Г. ‡2,3, Савватеев А.В. §4,2,3

[1]Российская экономическая школа
[2]Центральный экономико-математический институт РАН
[3]Московский физико-технический институт
[4]Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет

22.11.2022

Аннотация

Последовательная труэль — это игра трёх игроков, обобщающая дуэль. Для этого класса игр известен парадокс «выживания слабейшего», когда в равновесии игрок с наименьшей меткостью имеет наибольшую вероятность остаться в живых. В работе показывается, что при наличии стрельбы в воздух существует равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх, для которых с наибольшей вероятностью выживает, напротив, сильнейший из игроков.

1 Введение

Кратко труэль (в самой простой постановке) можно описать как обобщение дуэли. Имеется три игрока, каждый из которых характеризуется

*Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-010-00569-А).
†sizmalkov@nes.ru
‡nograhol@gmail.com
§hibiny@mail.ru

фиксированной меткостью. Игроки стреляют в заранее заданном порядке, каждый раз выбирая, в кого стрелять. Стрельба продолжается до тех пор, пока не останется единственный выживший. Выигрыш любого игрока равняется его вероятности выжить.

Изначально труэль была предложена Киннардом [1] в качестве математической головоломки. Впоследствии эта задача встречалась в разных сборниках задач и популярно-научной литературе (см. [2, глава 20, задача 9], [3, задача 20], [4]).

Задача привлекала своё внимание парадоксом, который можно сформулировать как «выживание слабейшего». Уже в первых публикациях (см. [5], [6], [7]), показывается, что игрок с наибольшей меткостью выживает с наименьшей вероятностью. Этот парадокс был подтверждён результатами ([8], [9]), где задача была формализована с точки зрения теории игр, а под решением подразумевалось нахождение равновесия по Нэшу.

Труэль можно рассматривать как модель поведения в условиях напряжённого конфликта. Так, равновесия в труэлях использовались в психологических исследованиях [10], для моделирования политических конфликтов [11], выбора решающего мнения при дебатах [12].

Целый ряд приложений труэлей возникает при рассмотрении сетевого взаимодействия N игроков. Здесь можно говорить, как о конкурентной борьбе фирм на рынке [12], так и об изменении популяции с течением времени [13], [14], что находит применения в эволюционной теории [15].

Насколько нам известно, задача поиска всех равновесий (даже совершенных на подыграх) до конца не решена. Проблема здесь состоит в том, что строгая формализация труэли как динамической игры допускает множество толкований: в каждом случае надо доопределить, что происходит в игре при бесконечном повторении промахов (а также сознательных выстрелов «в воздух», см. ниже).

В данной работе рассматривается одна из стандартных формализаций труэли — последовательная труэль, и показывается, что при определённых параметрах существует равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх, в котором с наибольшей вероятностью выживает сильнейший игрок. Текст устроен следующим образом. В разделе 2 приводится формализация игры. В следующих трёх разделах 3, 4, 5 мы последовательно изучаем поведение каждого из игроков. Затем мы определяем стратегии и доказываем, что данные стратегии образуют равновесие (раздел 6). Заключения и дальнейшие выводы содержатся в разделе 7.

2 Формализация игры

Рассмотрим дуэль трёх игроков (труэль) с заданными меткостями $0 < \alpha < \beta < \gamma = 1$. Игроков будем обозначать по их меткостям, например, игрок γ. Нас интересует следующая постановка задачи: рассматривается последовательная труэль, в которой порядок стрельбы задан заранее и не меняется в ходе игры. Например, в порядке $\beta\gamma\alpha$ сначала стреляет игрок β, потом игрок γ (если он жив), затем игрок α (если жив), и так далее. В начале труэли все игроки живы. В каждом раунде игрок выбирает, в которого стрелять из оставшихся игроков, или отказывается от стрельбы (стреляет в воздух). Если он стреляет в противника, то последний выбивает из игры с вероятностью, равной меткости стреляющего игрока. Все игроки знают, кто в кого стрелял, и кто остался в игре. Труэль заканчивается, когда в живых остался только один игрок, или когда все оставшиеся в живых игроки по очереди выстрелили в воздух[1] (такая ситуация называется *мирным исходом*). Выигрыш в игре определяется следующим образом: если остался один игрок, то он получает приз в размере 1, а остальные игроки получают 0. Если игра закончилась мирным исходом, то все игроки получают 0.[2]

Мы ищем равновесия по Нэшу, совершенные на подыиграх (SPE, SPE-равновесие). Цель этой работы — описать поведение игроков во всех SPE-равновесиях в этой игре, в том числе и в смешанных стратегиях. Для упрощения записи положим $\alpha^* = 1 - \alpha$, $\beta^* = 1 - \beta$, $\gamma^* = 1 - \gamma$ — вероятности промаха игрока.

Для заданной последовательности стрельбы SEQ обозначим через y_i^{SEQ} и z_i^{SEQ} минимальные и максимальные выигрыши, реализуемые в каких-либо SPE-равновесиях. Например, $y_\alpha^{\alpha\beta\gamma}$ — минимальный выигрыш игрока α в SPE-равновесии для последовательности стрельбы $\alpha\beta\gamma$. Строго говоря, выигрыши и равновесия в игре зависят не только от порядка стрельбы, но и от того, были ли выстрелы в воздух в предыдущих раундах. Например, если предыдущие два раунда игроки стреляли в воздух, то

[1]Также можно рассматривать ситуацию, когда всем игрокам разрешается по очереди выстрелить в воздух, и только следующий выстрел в воздух заканчивает игру. То есть, к примеру, если α стреляет в воздух, затем β стреляет в воздух, затем γ стреляет в воздух, и тогда при повторном выстреле α в воздух игра заканчивается.

[2]Можно рассматривать формализацию труэлей с положительными выигрышами игроков при мирном исходе. Структура равновесий в этом случае может быть другой. Данный случай нами не рассмотрен и оставлен для будущих исследований.

текущему игроку всегда выгоднее выстрелить в противника, поскольку тогда он с ненулевой вероятностью получает приз. В случае необходимости мы будем писать SEQ(k), где $k = 0, 1$ или 2 — количество выстрелов в воздух непосредственно перед ходом первого игрока

3 Поведение игрока γ в SPE-равновесиях.

Лемма 1 *Игрок γ в любом SPE-равновесии не стреляет в α, если β жив. Его минимальный выигрыш в SPE-равновесии для любой последовательности игроков, в которой он стреляет первым, удовлетворяет неравенству*

$$y_{\gamma}^{\gamma**} \geq \alpha^*.$$

Доказательство.

В самом деле, в кого бы ни целился игрок γ, он поражает цель первым же выстрелом. Следовательно, при стрельбе в игрока он попадает в ситуацию дуэли с оставшимся игроком, в котором его противник стреляет первым. Так как α — более слабый противник, чем β, то для игрока γ лучше стреляться с α, при этом в любом SPE-равновесии его выигрыш будет равен α^*. ■

Посмотрим, существует ли равновесие, в котором γ стреляет в воздух. Предположим, что γ в SPE-равновесии пропускает ход в первом раунде. Если в данном SPE-равновесии противники γ будут стрелять в воздух или в него, то спустя два хода в игре он будет либо мёртв, либо вновь стоять перед выбором мишени в ситуации, когда все живы с положительной вероятностью, либо получит выигрыш 0 (если все выстрелят в воздух).

В любом из этих сценариев его ожидаемый выигрыш будет равен вероятности попасть в четвертый раунд, домноженной на ожидаемый выигрыш в подыгре, начинающейся с этого раунда. Следовательно, его ожидаемый выигрыш γ в начале раунда 4 должен быть строго больше, чем α^*, так как по Лемме 1 его выигрыш как минимум равен α^* в любом SPE-равновесии.

Аналогично, если α и β будут стрелять в γ или в воздух в 5 и 6 раундах, то ожидаемый выигрыш γ в начале раунда 7 должен быть строго больше выигрыша в начале раунда 4. Повторяя рассуждение, мы получаем, что в γ должен ожидать всё больший и больший выигрыш, что недостижимо[3]. Поэтому для возможности использования стратегии выстрела в воздух игроком γ этот игрок должен верить, что в рассматриваемом равновесии один из его противников стреляет в другого противника в одном из следующих нескольких раундов.

Лемма 2 *Для любой последовательности стрельбы вида* $***$, $\alpha**$ *или* $\beta**$ *минимальный и максимальный ожидаемые выигрыши игроков* α *и* β *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$\begin{aligned} y_\alpha^{\alpha**} &\geq \alpha \times y_\alpha^{\beta\alpha} = \alpha\frac{\beta^*\alpha}{1-\alpha^*\beta^*}, \\ y_\beta^{\beta**} &\geq \beta \times y_\beta^{\alpha\beta} = \beta\frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*}, \\ z_\alpha^{***} &\leq y_\alpha^{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*}, \\ z_\beta^{***} &\leq y_\beta^{\beta\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha^*\beta^*}. \end{aligned}$$

Доказательство. Самый плохой вариант, который может произойти с игроком α (соотв. β) в любом, даже не равновесном сценарии — это когда оба противника стреляют в этого игрока. При таком выборе стратегий наилучшим ходом для α (соотв. β) будет выстрел в γ.

Что касается максимально возможного выигрыша, то игрок не может получить выигрыш больше, чем в дуэли с самым слабым противником, в котором игрок стреляет первым. ■

4 Поведение игрока β в SPE-равновесиях.

В этой статье мы будем рассматривать последовательности стрельбы, в которых β стреляет после α. [4]

Может ли β стрелять в α? Если β убивает α, то γ убьёт β в следующем раунде с вероятностью 1, поэтому ожидаемый выигрыш игрока β в

[3]Каждый раз ожидаемый выигрыш домножается на одно и то же число, большее 1, в то время как никакие выигрыши не могут превосходить 1.

[4]Симметричный случай — когда циклическая последовательность выстрелов игроков будет $\beta\alpha\gamma$ — чрезвычайно интересен, но оказался сложнее для анализа, чем рассматриваемый нами. Надеюсь, что эта статья вдохновит исследователей на изучение второго случая.

случае промаха (для последовательности $\gamma\alpha\beta$) должен быть достаточно большим. Иными словами,

$$\beta^* z_\beta^{\gamma\alpha\beta} \geq y_\beta^{\beta\gamma\alpha}$$

то есть в силу Леммы 2

$$z_\beta^{\gamma\alpha\beta} \geq \frac{\beta}{\beta^*} \frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*}. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим последовательность $\gamma\alpha\beta$ и равновесие, в котором β получает $z_\beta^{\gamma\alpha\beta}$. В силу Леммы 1, игрок γ в случае промаха β, должен получить по крайней мере α^*. Для того, чтобы β получил положительный выигрыш, γ с ненулевой вероятностью стреляет в воздух, так как в противном случае он убивает β. Если же γ пропускает ход, ожидая получить как минимум α^*, ожидаемый выигрыш игрока α, который стреляет следующим, должен быть не меньше $y_\alpha^{\alpha\beta\gamma}$, а значит, он должен быть тем же самым, что и в подыгре, где γ стреляет в воздух.

Используя неравенство (1), получаем, что сумма гарантированных выигрышей всех игроков в этом равновесии (при условии пропуска хода γ) составляет по крайней мере

$$\begin{aligned}
\alpha^* + \alpha\frac{\beta^* - \alpha^*\beta^*}{1-\alpha^*\beta^*} + \frac{\beta}{\beta^*}\frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*} &= \\
\frac{\alpha^*\beta + \alpha\beta^*\beta^*}{\beta^*(1-\alpha^*\beta^*)} &= \\
\frac{\beta - \alpha\beta + \alpha - 2\alpha\beta + \alpha\beta^2}{\alpha + \beta - 2\alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta^2} &> 1,
\end{aligned}$$

так как $\beta^2 > \alpha\beta$. Следовательно, не существует равновесия, в котором β с положительной вероятностью стреляет в α для рассматриваемых в этой статье последовательностей, в которых β стреляет после α.

Подытожим сказанное. Мы убедились в том, что в любом SPE-равновесии рассматриваемой версии дуэли трёх лиц ни β, ни γ никогда не целятся в игрока α. Здесь уместно вспомнить, что в предшествовавших формализациях труэлей всегда наблюдался эффект «выживаемости слабейшего» ([5],[12]). Теперь мы видим, почему это происходит. Однако, в отличие от наших предшественников, мы данное наблюдение строго обосновали.

5 Поведение игрока α в SPE-равновесиях.

Лемма 3 *Рассмотрим последовательности стрельбы $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$ и $\gamma\alpha\beta$. Предположим, что игрок α может выстрелить в воздух в свой ход. Тогда в любом SPE-равновесии должно выполняться неравенство*

$$y_\alpha^{\alpha\beta\gamma} \geq \alpha.$$

Более того, для последовательностей $\gamma\alpha\beta(0)$ и $\gamma\alpha\beta(2)$ игрок γ стреляет в β; в свою очередь, для последовательностей $\beta\gamma\alpha(1)$, игрок β стреляет в γ.

Доказательство. Пусть игрок α пропускает ход.

Если β также пропускает ход, то γ должен выстрелить в β, поэтому выигрыш α равен α.

Пусть теперь игрок β стреляет в γ. Рассмотрим все возможные случаи. Если β попал в игрока γ, то α получает $y_\alpha^{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*}$ в дуэли с игроком β, в которой α ходит первым.

В том случае, если β промахнулся и γ стреляет в β, игрок α получает всё тот же выигрыш α, потому что γ не промахивается.

А вот в последнем случае, когда β стреляет в γ и промахивается, а γ пропускает ход, α имеет возможность снова пропустить ход, и в силу рассмотренных выше случаев, получить не меньше α либо снова иметь возможность пропустить ход, и.т.д. Суммируя на всём бесконечном горизонте, мы заключаем, что выигрыш игрока α при возможности стрельбы в воздух не может быть меньше α ни в одном SPE-равновесии.

Так как α имеет возможность выстрелить в воздух, гарантируя себе α, то игрок γ не должен стрелять в воздух ни в каком SPE-равновесии. В самом деле, выстрел в β гарантирует игроку γ выигрыш α^* и нулевой выигрыш игроку β. Если же γ пропустит ход, то в таком продолжении игры у игрока β будет ненулевой ожидаемый выигрыш, а значит, выигрыш игрока γ будет строго меньше α^*.

В свою очередь, так как в рассматриваемых сценариях (когда α может пропустить ход) игрок γ будет стрелять в β, то для игрока β стрельба в воздух тоже не оптимальна. ■

Возможны ли такие SPE-равновесия, в которых α стреляет в воздух? Рассмотрим следующие стратегии (см. [8]): β и γ стреляют друг в друга вне зависимости от предыстории, и изучим, при каких условиях на параметры игрок α будет стрелять в воздух.

Если α стреляет, то выгоднее стрелять в γ, чем в β. В самом деле, в случае промаха разницы не будет — ибо стратегии β и γ по условию не зависят от предыстории. А в случае попадания лучше попасть в γ, это оставляет положительный выигрыш.

При выстреле в γ игрок α получает

$$\alpha y_\alpha^{\beta\alpha} + \alpha^* \left[\beta y_\alpha^{\alpha\beta} + \beta^*\alpha\right].$$

Если игрок α стреляет в воздух, его выигрыш равен

$$\beta y_\alpha^{\alpha\beta} + \beta^*\alpha.$$

Следовательно, игрок α выберет выстрел в γ если

$$\begin{array}{rcl}
y_\alpha^{\beta\alpha} & > & \beta y_\alpha^{\alpha\beta} + \beta^*\alpha \\
\dfrac{\beta^*\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} & > & \beta\dfrac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} + \beta^*\alpha \\
\beta^*\alpha & > & \alpha\beta + \alpha\beta^* - \alpha\alpha^*\beta^*\beta^* \\
\beta^*\alpha & > & \alpha - \alpha\alpha^*\beta^*\beta^* \\
\beta^* & > & 1 - \alpha^*\beta^*\beta^* \\
\beta & < & \alpha^*\beta^*\beta^*.
\end{array}$$

В итоге, мы получили, что

Лемма 4 *Для последовательностей, в которых β стреляет после α, во всех SPE-равновесиях, в которых β не воздерживается от стрельбы, игрок γ стреляет в β в любой предыстории, в то время как α стреляет в γ если $\beta < \alpha^*\beta^*\beta^*$, иначе он стреляет в воздух.*

Заметим, что если $\beta > \beta^*\beta^*$ (т.е. $\beta > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.381\,97$), игрок α обязательно выстрелит в воздух.

Нас, однако, интересуют и другие равновесия, не найденные нашими предшественниками. Дело в том, что в известных нам предыдущих исследованиях авторы молчаливо предполагали стратегии игроков не зависящими от предыстории, тем самым ограничиваясь лишь *равновесиями в стационарных стратегиях.* Однако угрозы и их формализация в виде общей концепции равновесия, совершенного на подыграх, прочно вошли в обиход современной теории игр.

Попытаемся найти пример равновесия с кардинально другим сценарием поведения игроков, и как следствие, с принципиально иным распределением вероятностей выживания в дуэли трёх лиц. Заметим, что для этого нам сразу надо предположить, что игрок β с положительной вероятностью стреляет в воздух, и «вынудить» игрока α стрелять в одного из двух оставшихся игроков.

6 Построение нового SPE-равновесия

Что, если у α не возможности стрельбы в воздух? Для этого оба игрока β и γ должны пропустить ход в предыдущих раундах. Рассмотрим SPE-равновесие, в котором β в раунде 1, и γ в раунде 2 стреляют в воздух. Чтобы γ выстрелил в воздух, он должен ожидать, что в будущем (не обязательно непосредственно в раунде 3) игрок α выстрелит в β с положительной вероятностью; в противном случае его ожидаемый выигрыш будет строго меньше α^* — в силу того, что γ никогда не начнёт дуэль первым.

Аналогично, чтобы β выстрелил в воздух, он должен ожидать, что игрок γ в некоторый момент выстрелит в воздух, и игрок α в некоторый момент выстрелит в γ. Отметим, что чем больше значение α, тем больше игроки β и γ получают от пропуска хода в том случае, когда α устраняет третьего игрока.

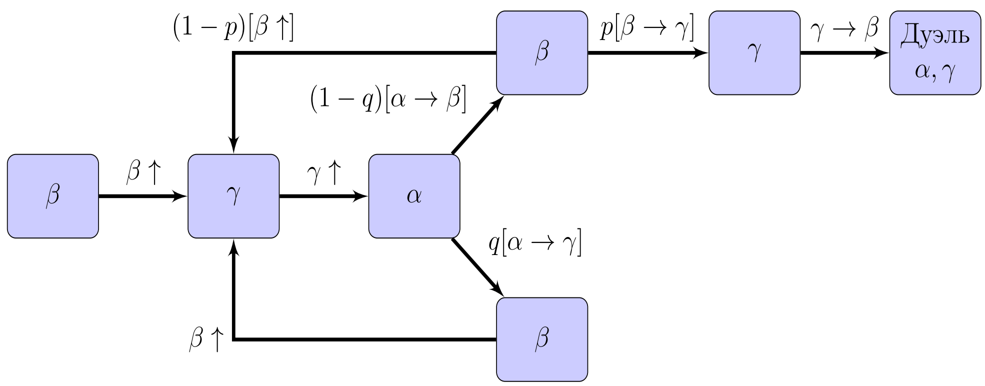
Теорема 1 (Основная теорема) *Для достаточно больших значений α и последовательностей стрельбы $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, и $\gamma\alpha\beta$ существует (смешанное) SPE-равновесие, в котором игроки β, γ пропускают ход с положительной вероятностью, а игрок α смешивает стратегии стрельбы в своих противников.*

Доказательство. Рассмотрим следующий профиль стратегий. Игрок γ всегда стреляет в воздух в случае, когда все игроки живы в последовательности $\beta\gamma\alpha(1)$ (при условии, когда β пропустил ход, а до β пропуска хода не было). Игрок γ стреляет в β во всех прочих предысториях.

Игрок β стреляет в воздух в раунде 1 или в случае, когда α выстрелил в γ на предыдущем ходу. Если же α стрелял в β, то β смешивает стратегии стрельбы в воздух и стрельбы в γ. (Это необходимо для стимулирования α стрелять в β.) Если α стрелял в воздух, то β стреляет в γ.

Игрок α стреляет в воздух, если может, иначе, он смешивает стрельбу в β и γ.

Для наглядности изобразим стратегии игроков в виде блок-схемы. Так как при попадании игрока в цель, игра сводится к дуэли с понятным исходом, для упрощения будем рассматривать только промахи.



Обозначим через q вероятность, с которой α стреляет в γ, через p вероятность, с которой β стреляет в γ, если α стреляет в β; $q^*=1-q$, $p^*=1-p$.

Имеем следующие условия:

$$\begin{aligned}
P_\beta &= \beta\frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*} = \alpha^* P_\beta + \alpha\left[q\frac{\beta}{1-\alpha^*\beta^*} + q^*\times 0\right],\\
P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)} &= q\left[\alpha\times 0 + \alpha^* P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)}\right] + q^*\left[\alpha\times 1 + \alpha^* p^* P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)} + \alpha^* p\beta^*\alpha^*\right] \geq \alpha^*,\\
P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma) &= \alpha\times\frac{\beta^*\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} + \alpha^* P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma) =\\
&= \alpha\times 0 + \alpha^*\left[p\beta\frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} + p\beta^*\alpha + p^* P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma)\right] = P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\beta).
\end{aligned}$$

Из первого равенства мы можем найти q. Имеем:

$$\begin{aligned}
\alpha\beta\frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*} &= \alpha q\frac{\beta}{1-\alpha^*\beta^*},\\
q &= \alpha^*\beta.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства находим p:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha}^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma) &= \frac{\alpha\beta^*}{1-\alpha^*\beta^*} = \alpha^*\left[p\beta\frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} + p\beta^*\alpha + p^*\frac{\alpha\beta^*}{1-\alpha^*\beta^*}\right] \\
\beta^* &= \alpha^*\left(p\beta + p^*\beta^* + p\beta^*(1-\alpha^*\beta^*)\right) \\
\beta^* &= \alpha^*(p + p^*\beta^* - p\beta^*\alpha^*\beta^*) \\
\beta^* &= \alpha^*(p + \beta^* - p\beta^* - p\beta^*\alpha^*\beta^*) \\
p &= \frac{\beta^*-\beta^*\alpha^*}{\alpha^*(\beta-\beta^*\alpha^*\beta^*)} = \frac{\beta^*\alpha}{\alpha^*(\beta-\alpha^*\beta^*\beta^*)} = \frac{\alpha-\alpha\beta}{\beta-\alpha\beta-\alpha^*\alpha^*\beta^*\beta^*} = \\
&= \frac{\alpha\beta^*}{\beta\alpha^*-\alpha^*\alpha^*\beta^*\beta^*}
\end{aligned}$$

Наконец, нам нужно проверить, что γ захочет выстрелить в воздух. Вычислим значение P_{γ}.

$$\begin{aligned}
P_{\gamma}^{\gamma\alpha\beta(1)}(1-\alpha^*q-\alpha^*q^*p^*) &= q^*\alpha + q^*\alpha^*p\beta^*\alpha^*, \\
P_{\gamma}^{\gamma\alpha\beta(1)} &= \frac{q^*\alpha + q^*\alpha^*p\beta^*\alpha^*}{1-\alpha^*q-\alpha^*q^*p^*} = \\
= \frac{q^*\alpha + q^*\alpha^*p\beta^*\alpha^*}{1-\alpha^*q-\alpha^*q^*+\alpha^*q^*p} &= \frac{q^*\alpha + q^*\alpha^*p\beta^*\alpha^*}{\alpha+\alpha^*q^*p}.
\end{aligned}$$

Мы хотим доказать, что это значение больше α^*, если $\alpha > \alpha^*$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{q^*\alpha + q^*\alpha^*p\beta^*\alpha^*}{\alpha+\alpha^*q^*p} &> \alpha^* \Leftrightarrow \\
q^*\alpha + q^*\alpha^*p\beta^*\alpha^* &> \alpha^*(\alpha+\alpha^*q^*p) \Leftrightarrow \\
\alpha(q^*-\alpha^*) &> q^*p\alpha^*\alpha^*\beta \Leftrightarrow \\
\alpha(\alpha-\alpha^*\beta) > p\alpha^*\alpha^*\beta(1-\alpha^*\beta) &= \frac{\alpha\beta^*}{\beta\alpha^*-\alpha^*\alpha^*\beta^*\beta^*}\cdot\alpha^*\alpha^*\beta(1-\alpha^*\beta) \Leftrightarrow \\
(\alpha-\alpha^*\beta)(\beta-\alpha^*\beta^*\beta^*) &> \beta^*\alpha^*\beta(1-\alpha^*\beta) \Leftrightarrow \\
(\alpha-\alpha^*\beta)\cdot(\beta-\alpha^*\beta^*\beta^*) &> (\beta^*\alpha^*)\cdot(\beta-\beta\alpha^*\beta)
\end{aligned}$$

При $\beta \geq \alpha > \alpha^* \geq \beta^*$ выполнены неравенства

$$\alpha - \alpha^*\beta > \alpha^* - \alpha^*\beta = \beta^*\alpha^*$$

и

$$\beta - \alpha^*\beta^*\beta^* > \beta - \beta\alpha^*\beta \Leftrightarrow \beta\alpha^*\beta > \alpha^*\beta^*\beta^* \Leftrightarrow \beta\beta > \beta^*\beta^*,$$

откуда требуемое неравенство выполнено при данных ограничениях.

■

7 Выводы и заключение

Приведём пример вычислений в конкретном случае, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 1$.

Подставляя формулы для p и q, получаем, что $q = 0.18$, $p \sim 0,44543$. Выигрыши игроков в этом случае составят $P_\alpha \sim 0.08163$, $P_\beta \sim 0.16531$, $P_\gamma \sim 0.75306$.

Мы видим, что в данном равновесии сценарий «выживания слабейшего» не выполняется! Напротив, у самого сильного из игроков максимальные шансы на победу. Более того, эти шансы тем выше, чем ближе α и β к единице. Фактически речь идёт о «молчаливом сговоре» сильных игроков против слабого. Несмотря на то, что средний по силе игрок при этом имеет также достаточно низкие шансы на выживание, стратегии устроены так, что в одиночку он ничего поделать не может.

Появление такого равновесия показывает нам, что в теории дуэлей трёх и более лиц — даже не три дна (см. [4]), а ещё больше. Заметим, что за бортом нашего исследования остались «одновременные дуэли» нескольких лиц, а также другие способы формализации конца игры (не говоря уже о другом циклическом порядке стрельбы троих игроков). Также представляет интерес обобщение результатов на более общий случай сетевого взаимодействия N игроков. Всё это составит предмет будущих теоретико-игровых прорывов.

Список литературы

[1] Kinnaird, C. *Encyclopaedia of puzzles and pastimes.* Citadel, Secaucus, NJ (1946).

[2] Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* М. Мир, 1971г 512 с.

[3] Ф. Моресteллер *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.* М. Физматлит, 1975.

[4] Акулич И.Ф. *Тройное дно тройной дуэли.* глава из книги *Библиотечка «Квант». Выпуск 105. Королевские прогулки.* Москва: Бюро Квантум, 2008. - Серия «Библиотечка «Квант». Приложение к журналу «Квант» №01/2008

[5] Shubik, M. *Does the fittest necessarily survive?* Readings in Game Theory and Political Behaviour, Doubleday, Garden, 43–46 (1954).

[6] Shubik, M. *Game theory and the study of social behavior: An introductory exposition.* Game Theory and Related Approaches to Social Behaviour, John Wiley & Sons, New York, NY (1964).

[7] Shubik, M. *Game theory in the social sciences: concepts and solutions.* MIT Press, Cambridge, MA, 1982.

[8] Kilgour, D. M. *The sequential truel.* Int. J. Game Theory 4, 151–174

[9] Kilgour, D. M. *Equilibrium points of infinite sequential truels.* Int. J. Game) (1978).

[10] Cole, S., Phillips, J., Hartman, A. *Test of a model of decision processes in an intense conflict situation.* Behavioral Science 22, 186–196 (1977).

[11] Dubovik, A. Parakhonyak, A. *Selective competition* Econstor, http://hdl.handle.net/10419/86731 (2009).

[12] Amengual, P., Toral, R. *Truels, or survival of the weakest.* Computing in Science and Engineering 8(5), 88–95, https://doi.org/10.1109/MCSE.2006.99 (2006).

[13] Archetti, M. *Survival of the weakest in N-person duels and the maintenance of variation under constant selection.* Evolution 66(3), 2012 637–650, https://doi.org/10.1111/j.1558-5646.2011.01477.x .

[14] N. L. Kontorovsky, J. P. Pinasco, and F. Vazquez *Random multi-player games* Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 32, 2022; https://doi.org/10.1063/5.00801372022

[15] Michael Wegener, Evla Mutlu *The good, the bad, the well-connected* International Journal of Game Theory (2021) 50:759–771