Последовательные труэли: равновесия, совершенные на подыграх

Измалков Сергей (РЭШ),
Ильинский Дмитрий (ЦЭМИ РАН, МФТИ),
Савватеев Алексей (АГУ, ЦЭМИ РАН, УДП, МФТИ)

Определение и история игры

Труэль или дуэль трёх лиц — это игра, в которой три игрока пытаются уничтожить противников посредством выстрелов.
Для каждого игрока задаётся точность попадания $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 1$.
α, β, γ всем известны. Игроков будем обозначать так же, как и меткости.
Выигрыш — вероятность выжить.
Первое упоминание этой игры принадлежит Киннарду (1946), термин «труэль» введен Мартином Шубиком в 60-х годах.
Рассматриваются различные правила проведения труэлей: последовательные, одновременные, с конечным/бесконечным количеством патронов.

Парадокс «выживания слабейшего»

В основном в этих играх изучается т.н. парадокс «выживания слабейшего» (survival of the weakest, Шубик, 1954).

В широком диапазоне параметров наибольшая вероятность выжить у слабейшего игрока α.

Пример: при $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 1$ игроки α, β стремятся выстрелить в γ (чтобы остаться в дуэли с более слабым игроком), поэтому γ с большей вероятностью погибает.

В литературе приводятся разные примеры, когда выживание слабейшего наблюдается.

Проблема «пропуска хода»

Другая проблема — разрешать ли игрокам «пропускать ход» или «стрелять в воздух».

Почему это может быть выгодно: предположим, что у каждого игрока есть один ход и меткость равна 1. Стреляют последовательно. Тогда если первый выстрелит, то его убьют следующим ходом. Но если он «выстрелит в воздух», то второму будет выгодно стрелять в третьего, чтобы в живых остались первый и второй.

Стрельбу в воздух при бесконечном числе раундов надо аккуратно прописывать, ведь если все игроки по очереди будут стрелять в воздух, то игра никогда не закончится.

Формализация «пропуска хода»

Логично предположить, что если все игроки по очереди выстрелили воздух, то они не хотят стрелять, и поэтому можно закончить дуэль с 0 выигрышем у всех троих игроков.

Данная постановка порождает дополнительные сложности: теперь выбор игрока в последовательной стрельбе зависит от того, что делали другие игроки в предыдущие моменты игры.

Поэтому важно рассматривать динамическую модель игры, и исследовать там SPE-равновесия.

Игроки и стратегии

Играют три игрока с точностью попадания $0 < \alpha < \beta < \gamma = 1$.
α, β, γ всем известны.
Игроки стреляют по очереди в заранее известном порядке, порядок не меняется пока все игроки живы.
Стратегии: каждый игрок стреляет в одного из противников или пропускает ход (стреляет в воздух).

Конец игры и выигрыши игроков

Если в живых остался один игрок, он получает ценный приз стоимость 1, остальные получают 0.
Стрельба в воздух: если все три игрока по очереди пропустили ход, то игра тут же заканчивается, а игрокам выплачивается 0.
Цель: найти все SPE-равновесия.

Обозначения

$\alpha^* = 1 - \alpha$, $\beta^* = 1 - \beta$, $\gamma^* = 1 - \gamma$.
m_i^{SEQ}, M_i^{SEQ} — минимальный (максимальный) выигрыш игрока i, если стрельба идёт в последовательности SEQ. Например $m_\alpha^{\beta\gamma\alpha}$ — минимальный выигрыш игрока α, если стрельба идёт в последовательности $\beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma, \alpha \ldots$
Строго говоря, возможные действия игрока и его выигрыш зависят от предыдущих ходов. А именно, игроку может быть запрещено стрелять в воздух и/или своим пропуском хода он запретит следующему игроку стрелять в воздух.
В случаях, если это играет роль, будем писать $m_i^{SEQ(k)}$, $M_i^{SEQ(k)}$, где $k = 0, 1, 2$ — количество пропущенных ходов непосредственно перед ходом игрока i.

Поведение игрока γ

Lemma 1. Игрок γ в SPE-равновесии не стреляет в α, если β жив. При этом

$$m_{\gamma}^{\gamma**} \geq \alpha^{*}.$$

Lemma 2. Если игрок γ пропускает ход, то он верит в то, что один из его противников стреляет в другого в течение следующих двух ходов.

Поведение α,β

Lemma 3. Для любых последовательностей $***$, $\alpha**$, $\beta**$:

$$m_\alpha^{\alpha**} \geq \alpha \times m_\alpha^{\beta\alpha} = \alpha \cdot \frac{\beta^*\alpha}{1-\alpha^*\beta^*};$$

$$m_\beta^{\beta**} \geq \beta \times m_\beta^{\alpha\beta} = \beta \cdot \frac{\beta\alpha^*}{1-\alpha^*\beta^*};$$

$$M_\alpha^{***} \leq m_\alpha^{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*}$$

$$M_\beta^{***} \leq m_\beta^{\beta\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha^*\beta^*}$$

Действия β и α

Начиная с этого момента, будем рассматривать только последовательности $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, $\gamma\alpha\beta$.

Lemma 4. В таких последовательностях не существует SPE, в которых β стреляет в α.

Lemma 5. Если в SPE α имеет возможность стрелять в воздух в свой ход, то

$$m_{\alpha}^{\alpha\beta\gamma} \geq \alpha.$$

При этом в ситуации $\gamma\alpha\beta(0)$ и $\gamma\alpha\beta(2)$ игрок γ стреляет в β, а в $\beta\gamma\alpha(1)$ игрок β стреляет в γ.

Возможность стрельбы α в воздух

Когда у α нет возможности стрелять в воздух?
β и γ должны выстрелить в воздух перед α.
γ стреляет в воздух, если в одном из следующих раундов α выстрелит в β.
(Иначе ожидаемый выигрыш не превосходит $\alpha^* \cdot \alpha^* < \alpha^*$.)
β стреляет в воздух, если γ иногда стреляет в воздух (иначе γ убивает β) и α иногда стреляет в γ.
Чем больше α, тем больше потенциальный выигрыш у стрельбы в воздух β и γ.

Теорема о равновесии

Theorem 1. При достаточно большом α, существует (смешанное) SPE-равновесие, в котором β, γ стреляют в воздух с положительной вероятностью, а α смешивает стрельбу в β и γ.

▷ Стратегии в равновесии:

$$\gamma : \begin{cases} \uparrow, & \gamma\alpha\beta(1) \\ \to \beta, & \gamma\alpha\beta(0) \end{cases}. \quad \beta : \begin{cases} \uparrow, & \text{1-й ход или } \alpha \to \gamma \text{ в пред. раунде} \\ p^*(\uparrow) + p(\to \gamma), & \alpha \to \beta \text{ в пред. раунде} \\ \to \gamma, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\alpha : \begin{cases} \uparrow, & \alpha\beta\gamma(0,1) \\ q^*(\to \beta) + q(\to \gamma), & \alpha\beta\gamma(2). \end{cases}$$

Выигрыш игрока β, значение q.

$$\begin{cases} \beta\uparrow, & 1 \text{ ход}, \alpha\to\gamma \\ p^*(\beta\uparrow)+p(\beta\to\gamma), & \alpha\to\beta \\ \beta\to\gamma, & \text{иначе} \end{cases};\begin{cases} \gamma\uparrow, & \gamma\alpha\beta(1) \\ \gamma\to\beta, & \gamma\alpha\beta(0) \end{cases};\begin{cases} \alpha\uparrow, & \alpha\beta\gamma(0,1) \\ q^*(\alpha\to\beta)+q(\alpha\to\gamma), & \alpha\beta\gamma(2) \end{cases}$$

В равновесии β всё равно, стрелять ли в воздух или в γ. Обозначим через P_β его выигрыш.

Если $\beta\to\gamma$, то $\gamma\to\beta$, и выигрыш $P_\beta=\beta\frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*}$.

Если $\beta\uparrow$, то $\gamma\uparrow$, а α стреляет с вероятностью q в γ, и выигрыш β равен $P_\beta=\alpha^*P_\beta+\alpha\left[q\frac{\beta}{1-\alpha^*\beta^*}+q^*\cdot 0\right]$.

Отсюда $\alpha\beta\frac{\alpha^*\beta}{1-\alpha^*\beta^*}=\alpha q\frac{\beta}{1-\alpha^*\beta^*}$, и поэтому $q=\alpha^*\beta$.

β не будет стрелять в α (Лемма 4), и он не получит больший выигрыш при отклонении.

Выигрыш игрока α, значение p.

$$\begin{cases} \alpha\uparrow, & \alpha\beta\gamma(0,1) \\ q^*(\alpha\to\beta)+q(\alpha\to\gamma), & \alpha\beta\gamma(2) \end{cases};\begin{cases} \beta\uparrow, & \text{1 ход, } \alpha\to\gamma \\ p^*(\beta\uparrow)+p(\beta\to\gamma), & \alpha\to\beta \\ \beta\to\gamma, & \text{иначе} \end{cases};\begin{cases} \gamma\uparrow, & \gamma\alpha\beta(1) \\ \gamma\to\beta, & \gamma\alpha\beta(0) \end{cases}.$$

В случае, когда β и γ последовательно выстрелили в воздух, α должно быть всё равно, в кого стрелять. Обозначим через $P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(i)$ его выигрыш при стрельбе в противника i.

$\alpha\to\gamma,\beta\uparrow,\gamma\uparrow$: $P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma)=\alpha\times\frac{\beta^*\alpha}{1-\alpha^*\beta^*}+\alpha^*P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma)$

$\alpha\to\beta, p^*(\beta\uparrow;\gamma\uparrow)+p(\beta\to\gamma,\gamma\to\beta)$:

$P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\beta)=\alpha\cdot 0+\alpha^*\left[p^*P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}(\gamma)+p\beta\frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*}+p\beta^*\alpha\right].$

Приравнивая выигрыши, получаем, что $p=\frac{\alpha-\alpha\beta}{\beta-\alpha\beta-\alpha^*\alpha^*\beta^*\beta^*}$.

Когда α стреляет в воздух.

$$\begin{cases} \alpha\uparrow, & \alpha\beta\gamma(0,1) \\ q^*(\alpha\to\beta)+q(\alpha\to\gamma), & \alpha\beta\gamma(2) \end{cases} ; \begin{cases} \beta\uparrow, & 1 \text{ ход}, \ \alpha\to\gamma \\ p^*(\beta\uparrow)+p(\beta\to\gamma), & \alpha\to\beta \\ \beta\to\gamma, & \text{иначе} \end{cases} ; \begin{cases} \gamma\uparrow, & \gamma\alpha\beta(1) \\ \gamma\to\beta, & \gamma\alpha\beta(0) \end{cases} .$$

В случае, когда β и γ последовательно выстрелили в воздух, α обязан в кого-то стрелять, и ему всё равно в кого стрелять. Поэтому он не будет отклоняться от своей стратегии.

Пусть вместо стрельбы в воздух, α выстрелит в β или γ.

$\alpha\uparrow$, $\beta\to\gamma$, $\gamma\to\beta$, и выигрыш равен $\beta m_\alpha^{\alpha\beta}+\beta^*\alpha$.

$\alpha\to\gamma$, $\beta\uparrow$, $\gamma\uparrow$, $[q^*(\alpha\to\beta)+q(\alpha\to\gamma)]$ и выигрыш равен

$\alpha m_\alpha^{\beta\alpha}+\alpha^* P_\alpha^{\alpha\beta\gamma(2)}=m_\alpha^{\beta\alpha}$.

$\alpha\to\beta$, с вероятностью p: $\beta\to\gamma$, $\gamma\to\beta$, с вероятностью $1-p$: $\beta\uparrow$, $\gamma\uparrow$.

Когда α стреляет в воздух (неравенство).

$$\begin{cases} \alpha \uparrow, & \alpha\beta\gamma(0,1) \\ q^*(\alpha \to \beta) + q(\alpha \to \gamma), & \alpha\beta\gamma(2) \end{cases}; \begin{cases} \beta \uparrow, & 1 \text{ ход}, \ \alpha \to \gamma \\ p^*(\beta \uparrow) + p(\beta \to \gamma), & \alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma, & \text{иначе} \end{cases}; \begin{cases} \gamma \uparrow, & \gamma\alpha\beta(1) \\ \gamma \to \beta, & \gamma\alpha\beta(0) \end{cases}.$$

Таким образом, если $\alpha \to \beta$, то получается смесь двух предыдущих случаев. Отсюда достаточно проверить неравенство:

$$\beta m_\alpha^{\alpha\beta} + \beta^*\alpha > m_\alpha^{\beta\alpha}.$$

$\beta \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} + \beta^*\alpha > \frac{\beta^*\alpha}{1-\alpha^*\beta^*} \Leftrightarrow \beta\alpha + \beta^*\alpha(1-\alpha^*\beta^*) > \beta^*\alpha \Leftrightarrow \beta > \alpha^*\beta^*\beta^*.$
Заметим, что неравенство достигается при $\beta > \beta^*\beta^*$, то есть при $\beta > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sim 0.37.$

Проверка того, что γ хочет стрелять в воздух.

Для того, чтобы γ стрелял в воздух, необходимо проверить, что $P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)} \geq \alpha^*$.
$P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)} = q\left[\alpha \cdot 0 + \alpha^* P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)}\right] + q^*\left[\alpha \cdot 1 + \alpha^* p^* P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)} + \alpha^* p \beta^* \alpha^*\right] \geq \alpha^*$,
$P_\gamma^{\gamma\alpha\beta(1)} = \frac{q^*\alpha + q^*\alpha^* p\beta^*\alpha^*}{1-\alpha^* q - \alpha^* q^* p^*} \geq \frac{q^*\alpha}{1-\alpha^* q - \alpha^* q^*} = q^* = 1 - \alpha^*\beta > 1 - \alpha^* = \alpha \geq \alpha^*$,
при $\alpha > 0.5$.

Конкретные значения параметров.

$\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, $\gamma = 1$.
Тогда $q = 0.18$, $p = 0.44543$, $P_\beta \sim 0.16531$, $P_\alpha \sim 0.08163$, $P_\gamma \sim 0.75306$.